Глава 2
ПРОГРАМУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

2.1. Способи спрощення задачі нелінійного програмування на основі класифікації обмежень

Вступ та постановка задачі. У загальному випадку задачі нелінійного програмування (ЗНП) є неопуклими, такими задачами, що важко розв'язуються, оскільки відбувається експоненціальне зростання складності обчислень від розмірності і рівня похибки. Проте опуклі ЗНП – задачі, що можуть бути легко вирішені існуючими методами, що сходяться зі швидкістю геометричної прогресії: наприклад, метод центрів тяжіння, в окремому випадку метод еліпсоїдів. Також важливою проблемою ЗНП є те, що вони можуть містити велику кількість обмежень. В процесі розв'язання ЗНП може виявитися, що частину з цих обмежень можна було б відкинути, що значно спостило б початкову постановку ЗНП, тим самим, зменшивши її обчислювальну складність.

Існуючими методами можливо звести неопуклі ЗНП до опуклих ЗНП. В [4] представлений спосіб зменшення обчислювальної складності ЗНП, що використовує багатокритеріальну оптимізацію. Розмірність ЗНП зменшується завдяки використанню багатокритеріальної моделі, де скалярний критерій побудований на основі нелінійної схеми компромісів (НСК) Вороніна, уведеної в [1]. У випадку опуклості частинних критеріїв скалярний критерій на основі НСК зводить ЗНП до опуклої ЗНП. Тому представлення ЗНП великої розмірності більш складною багатокритеріальною задачею виправдане зниженням обчислювальної складності задач ЗНП і зменшення її розмірності.

Особливе місце серед скалярних функцій частинних критеріїв займає НСК або згортка А.Н. Вороніна [1]. Вона являє собою скалярну функцію особливого вигляду, у якій згортаються частинні критерії, і в багатокритеріальній оптимізації відіграє таку саму роль, що і цільова функція в ЗНП. Переваги використання НСК полягають у тому, що, по-перше, така модель ЗНП, є досить простою по обчислювальних витратах і при цьому дозволяє одержати розв'язання з множині Парето з урахуванням обмежень за принципом «якомога далі від обмежень». По-друге, НСК у якості цільової функції отриманої ЗНП при опуклості частинних критеріїв, побудованих на основі обмежень і цільової функції початкової ЗНП має властивість унімодальності. Таким чином, початкова ЗНП стає одноекстремальною.

Також НСК має властивість безупинної адаптації до різних ситуацій, у яких потрібно прийняти багатокритеріальний розв'язок. Тому необхідно дослідити всі можливості спрощення ЗНП на основі отриманих результатів в [2, 4].

Мета даної роботи – розробити різні способи спрощення задачі нелінійного програмування на основі нелінійної схеми компромісів (НСК) Вороніна.

Основна частина. Розглянемо різні скалярні згортки частинних критеріїв і проаналізуємо їх можливості в спрощенні ЗНП. Приділимо увагу механізму взаємній компенсації конфліктних частинних критеріїв, яка відбувається між ними в процесі оптимізації скалярної згортки. Частинні критерії в багатокритеріальній постановці ЗНП – це компоненти початкової ЗНП: її цільова функція і система обмежень.

В загальному випадку функція корисності особи, що приймає рішення (ОПР) може бути представлена як Ф[i(y),r], де $y = \{y_i\}_{i=1}^{n} \in Y$ – вектор можливих рішень, $i = \{i_k\}_{k=1}^{s} \in \Omega$ – вектор частинних критеріїв, що визначаються в припустимій області $\Omega = \{i \mid 0 \le i_k(y) \le A_k, k \in [1, s]\}$, $A_k = \sup_{y \in \Gamma_y} i_k(y)$, $k = \overline{1, s}$, $r \in R$ – вектор зовнішніх умов, що визначається на множині можливих факторів R. Проблема полягає в коректній апроксимації функції корисності та побудови адекватної даній ситуації змістовної математичної моделі (скалярної згортки) для розв'язання різноманітних багатокритеріальних задач.

Зазвичай при розв'язанні багатокритеріальних задач припускають, що вектор r фіксований та заданий: $r = r_0$. Тоді функція корисності ОПР може бути представлена скалярною згорткою критеріїв:

$$\Phi[i(y), r]_{|r=r^{\circ}} = I[i(y)]^{o}, \tag{1}$$

де $I[i(y)]^{o}$ – скалярна згортка, побудована по схемі компромісів, адекватній заданій ситуації.

Скалярна згортка $I[i(y)]^{o}$ застосовується, якщо вектор критеріїв **i**(**y**) пронормований вектором обмежень $\mathbf{A}_k$. Компоненти вектора **i**(y) повинні бути піддані нормалізації, оскільки розв'язок задачі визначається на множині ефективних точок (області Парето) тільки за умови приведення всіх частинних критеріїв до єдиної розмірності або безрозмірної форми. У [1] представлений об'єктивний спосіб нормалізації, у результаті якого не порушується рівноправність жодного з частинних критеріїв, і який не залежить від масштабу. Нормалізований вектор ефективності: $i_{0k} = i_k(y)/A_k$.

Скалярна згортка або функція частинних критеріїв $I[i_0(y)]$ в задачі оптимізації має зміст цільової функції. В результаті її екстремізації отримують компромісно-оптимальний вектор аргументів y*. Нижче розглянемо задачу оптимізації, в якій всі критерії $i_0(y)$ мінімізуються. Тоді математично задача векторної оптимізації набуде вигляду:

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} I[i_0(y)]. \qquad (2)$$

В [1] уведене поняття напруженості ситуації, як міри близькості відносних частинних критеріїв якості до свого граничного значення (одиниці):

$$\zeta_k = 1 - y_{0k}, \zeta_k \in [0,1]. \qquad (3)$$

Якщо багатокритеріальний розв’язок приймається в напруженій ситуації, то це значить, що в заданих умовах один або кілька частинних критеріїв у результаті розв’язання можуть виявитися в небезпечній близькості до своїх граничних розв’язків ($\zeta_k \approx 0$). Ця подія не компенсується можливим малим рівнем інших критеріїв якості. У цій ситуації необхідно всіляко перешкоджати небезпечному зростанню найбільш напруженого (тобто найбільш близького до своєї межі) частинного критерію, не звертаючи увагу на поведінку інших в даний момент. Отже, адекватним виразом схеми компромісів у випадку напруженої ситуації є мінімаксна модель:

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \max_{k \in [1,k]} i_{ok}(y). \qquad (4)$$

Ця схема (чебишевська модель) змушує мінімізувати гірший (найбільший) з відносних критеріїв якості, зводячи його до рівня інших, коли відбувається вирівнювання всіх частинних критеріїв.

У менш напружених ситуаціях необхідно досягати одночасного використання й інших критеріїв, враховуючи суперечливу єдність всіх інтересів і конфліктуючих цілей системи. Зі зменшенням напруженості ситуації переваги окремих критеріїв вирівнюються. У проміжних випадках необхідно вибирати схеми компромісів, які дають різні степені часткового вирівнювання частинних критеріїв.

В другому, полярному випадку ($\zeta_k \approx 1$), ситуація спокійна, частинні критерії малі і не виникає ніякої загрози порушення обмежень. Можна вважати, що одиниця погіршення одного з частинних критеріїв компенсується рівнозначною одиницею поліпшення будь-якого з інших. Цьому випадкові відповідає економічна схема компромісів, яка забезпечує мінімальні для заданих умов сумарні втрати за частинними критеріями. Така схема виражається моделлю інтегральної оптимальності:

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k i_{ok}(y). \tag{5}$$

Модель інтегральної оптимальності (5) забезпечує мінімальний сумарний рівень частинних критеріїв. Загальним недоліком цієї схеми є можливість різкої диференціації рівня окремих критеріїв, тому розв'язання на основі (5) за допомогою комп'ютерних програм, як безумовної задачі оптимізації, дає неприйнятні результати за межами допустимої області розв'язку задачі. Тому необхідно вводити додаткові обмеження на частинні критерії $y_k(x)$ для компенсації цієї диференціації.

На практиці часто зустрічається ситуація, коли в процесі оптимізації вектора ефективності $I[i(y)]$ частинні критерії i(y) оптимізуються нерівномірно, причому один частинний критерій може змінюватися повільно, у той час, як інші – дуже швидко. У такому випадку отриманий розв'язок може виявитися нестійким і неоптимальним, тобто буде лежати поза областю Парето. Тому ОПР обирає між моделлю інтегральної оптимальності в спокійних ситуаціях і мінімаксною моделлю в напружених ситуаціях. В проміжкових випадках ОПР вибирає схеми компромісів, що призводять до різних степенів врахування окремих критеріїв відповідно до своїх індивідуальних переваг, але з врахуванням заданої ситуації.

Для спрощення вибору між скалярними згортками $I(i_0)$, що реалізують різну напруженість ζ_k (або різні принципи оптимальності) навіть в межах одної розв'язуваної багатокритеріальної задачі, але з іншими початковими умовами, варто використовувати деяку одну скалярну згортку частинних критеріїв.

Отже, універсальна згортка повинна бути виразом адаптаційної схеми компромісів, що є головною змістовною сутністю дослідження багатокритеріальних систем. Скалярна згортка в явному вигляді повинна також вміщувати характеристики напруженості ситуації ζ.

Для формалізації вибору схеми компромісів в [1] запропонована концепція НСК. З можливих функцій, що задовольняють перерахованим вимогам, розглянута найпростіша:

$$I(\alpha, i_o) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - i_{ok}(y)]^{-1},\ \alpha_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{S} \alpha_k = 1, \tag{6}$$

де a_k = const – формальні параметри, які мають подвійну інтерпретацію. З одного боку – це коефіцієнти, які виражають пріоритет критеріїв. З іншого боку – коефіцієнти регресії змістовної регресивної моделі, побудованої на основі концепції нелінійної схеми компромісів.

Нелінійна схема компромісів (6) враховує як поведінку моделі інтегральної оптимальності (5) у спокійних ситуаціях, так і мінімаксної моделі (4) у напружених. Вона, в явному вигляді, залежна від характеристик напруженості ситуації (3):

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - i_{0k}(y)]^{-1} . \tag{7}$$

З виразу (7) видно, що якщо який–небудь з відносних частинних критеріїв, наприклад $i_{0k}(y)$, почне близько наближатися до своєї межі (одиниці), тобто ситуація стане напруженою, то відповідний член $I_k = 1/\alpha_k[1 - i_{0k}(y)]$ у сумі, яку мінімізуємо, зросте настільки, що проблема мінімізації всієї суми зведеться до мінімізації тільки даного найгіршого члена, тобто, в остаточному результаті, критерію $i_{0k}(y)$. Це еквівалентно дії мінімаксної моделі (4). Якщо ж відносні частинні критерії далекі від одиниці, тобто ситуація спокійна, то модель (7) діє еквівалентно моделі інтегральної оптимальності (5). У проміжних ситуаціях виходять різні степені часткового вирівнювання критеріїв. Для унеможливлювання ділення на нуль в напружених ситуаціях при оптимізації по формулі (7) використовують умову: якщо $i_{0k}(y) \ge 0{,}95$, то приймають $i_{0k}(y) = 0{,}95$. Отже, НСК (6) адаптується до різних ситуацій в процесі багатокритеріального рішення. Тут адаптація здійснюється неперервно, в той же час як традиційний вибір схеми компромісів відбувається дискретно і в результаті до суб'єктивних помилок додаються помилки, пов'язані з квантуванням схем компромісів.

В [1] показано, що коли $i_0(y)$, $i = \overline{1, m}$ – неперервні і строго опуклі на паралелепіпеді $\Pi_y = \{y \in E^n \mid a_i \le y_i \le b_i, i = \overline{1, n}\}$ функції, то скалярна згортка за НСК $\Phi(y) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k (1 - i_{0k}(y))^{-1}$, $y \in \Gamma_y$, при нормованих частинних критеріях має єдиний мінімум на паралелепіпеді Π_x, тобто функція $\Phi(y)$ є унімодальною. Отже, для частинних критеріїв підбираються строго опуклі функції, щоб задача оптимізації за схемою (7) мала єдиний розв'язок.

Переваги НСК полягають у тому, що, по-перше, її використання є досить простою по обчислювальних витратах і при цьому дозволяє одержати розв’язок з множині Парето з урахуванням обмежень за принципом «якомога далі від обмежень». По-друге, скалярна згортка (6) при опуклості частинних критеріїв має властивість унімодальності (тобто задача стає одноекстремальною). Також НСК має властивість безупинної адаптації до різних ситуацій, у яких потрібно прийняти багатокритеріальний розв’язок. У напружених ситуаціях (коли один або декілька частинних критеріїв знаходяться в небезпечній близькості від обмежень) вона діє еквівалентно мінімаксної моделі, у досить спокійних ситуаціях згортка в (6) діє еквівалентно моделі інтегральної оптимальності (тобто економічній схемі компромісів). У проміжку між обома полюсами нелінійна згортка дає різні ступені вирівнювання частинних критеріїв. При цьому застосування нелінійної схеми компромісів дозволяє підвищити точність розв’язання завдяки безперервності адаптації.

Постановка ЗНП. Нехай R^n – n-мірний простір векторів $y=(y_1, y_2,\dots,y_n)$,$g(y)$ і $\varphi(y)$ – задані вектори-функції, визначені на R^n:

$$\mathbf{y}=(y_1, y_2,\dots,y_n),$$
$$g(y)=\{g_1(y),g_2(y),\dots,g_m(y)\}=0 \text{ – обмеження у формі рівностей},$$
$$\varphi(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y),\dots,\varphi_r(y)\}\geq 0 \text{ – обмеження у формі нерівностей}, \qquad (8)$$

де $g_i(y)$ і $\varphi_i(y)$ – скалярні функції.

Позначимо через G множину векторів у простору $\mathbf{R}^n$, для яких $g(y)=0$ і $\varphi(y)\geq 0$, тобто:

$$G\equiv\{y;\ g(y)=0;\ \varphi(y) \geq 0\}.$$

Нехай F(y) – задана скалярна функція. ЗНП полягає у знаходженні вектора $\tilde{y}$ на $\mathbf{R}^n$, мінімізуючого функцію F(y) на множині G, тобто такого, що:

$$F(\tilde{y}) = \min_{y\in G} F(y). \qquad (9)$$

Функція F(y) називається цільовою функцією задачі (8).

Якщо в ЗНП функції F(y), g(y) і φ(y) – лінійні, то вона називається задачею лінійного програмування (ЗЛП).

Усунення багатоекстремальності ЗНП.

Наведемо багатокритеріальну модель ЗНП, оскільки нас цікавить кожний компонент ЗНП: і цільова функція, і система обмежень у якості частинних критеріїв, притаманних багатокритеріальним задачам. Щоб подолати багатоекстремальність або «ефект лабіринту» ЗНП, необхідно використати НСК, яка зводить ЗНП до опуклої ЗНП (в разі опуклості частинних критеріїв). Спрощену модель ЗНП можна вирішувати відомими методами.

В роботі [4] автором була представлена багатокритеріальна модель ЗНП, проте є можливість спростити представлену там постановку цієї моделі, що і буде показано нижче.

Нехай задана множина можливих розв'язків Y, яка складається з векторів $y = \{y_i\}_{i=1}^{n}$ n-мірного евклідового простору. Якість розв'язку оцінюється по сукупності суперечливих частинних критеріїв, що утворюють s-мірний вектор $I(y) = \{I_k(y)\}_{k=1}^{S} \subset F$, який визначений на множині Y, і який належить класові F допустимих векторів ефективності. Вектор частинних критеріїв обмежений допустимою областю: $I \in M$.

Для обмежень, що утворюють допустиму область M у формі рівностей g(y)=0, складемо частинні критерії суми квадратів нев'язок:

$$I_{\text{рівн}\ i} = g_i^2(y) \le m\varepsilon_1^2, i = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Для обмежень у формі нерівностей φ(y)≥0 перетворимо обмеження у вигляді нерівностей у рівності за допомогою введення нової змінної v_i, що має розмірність r:

$$\varphi_i(y) - v_i^2 = 0. \tag{11}$$

Такий підхід використовується для методу множників Лагранжа, при перетворенні умовної задачі оптимізації в безумовну. Для методу множників Лагранжа це перетворення запишемо як:

$$I(y, \lambda, v) = F(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\varphi_i(y) - v_i^2\right] + \sum_{j=r+1}^{r+m} \lambda_j g_j(y);\ j = \overline{1, r+m};\ i = \overline{1, n}, \tag{12}$$

де задача мінімізації зведеться до розв'язання системи нелінійних рівнянь (СНР) розмірності 2r+m+n рівнянь:

$$\frac{\partial I(y)}{\partial \lambda_j} = 0; \frac{\partial I(y)}{\partial y_i} = 0; \frac{\partial I(y)}{\partial v_l} = 0,\ j = \overline{1, r+m},\ i = \overline{1, n},\ l = \overline{1, r}. \tag{13}$$

Для обмежень у формі нерівностей φ(y)≥0 складемо частинні критерії суми квадратів нев'язок:

$$I_{\text{нерівн}_l} = \left[\varphi_l(y) - v_l^2\right]^2 \le \varepsilon_2^2, l = \overline{1, r}. \tag{14}$$

Отже, набір частинних критеріїв багатокритеріальної задачі для ЗНП (8) запишеться в такий спосіб:

$$\begin{cases} \min I_1 = F(y);\ 0 \le I_1 \le I_{1\max};\text{при } g_i(y) = 0,\ i = \overline{1,m} \\ \min I_{\text{рівн}_i} = g_i^2(y), 0 \le I_{\text{рівн}_i} \le I_{\text{рівн }i\max}; I_{\text{рівн}_{i\max}} = \varepsilon_i; \\ \text{при } \varphi_l(y) \ge 0, l = \overline{1,r},\ \min I_{\text{нерівн}_l} = \left[\varphi_l(y) - v_i^2\right]^2 \\ 0 \le I_{\text{нерівн}_l} \le I_{\text{нерівн}_{l\max}},\ I_{\text{нерівн }l\max} = \varepsilon_l. \end{cases} \tag{15}$$

$$I^* = \sum_{j=1}^{m+r+1} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{I_j}{I_{j\max}}\right)^2}.$$

Для векторного критерію I, компонентами якого є частинні критерії, кількість змінних: r+m+n, n – розмірність змінних y_1, y_2, …y_n; m – кількість обмежень вигляду рівностей; r – кількість обмежень вигляду нерівностей.

Багатокритеріальна задача (15) зводиться до розв’язання однієї задачі оптимізації за НСК:

$$y^* = \arg\min I^* \tag{16}$$

при обмеженнях з (6).

Необхідні умови мінімуму скалярного критерію I* дають систему кінцевих рівнянь низької розмірності:

$$\frac{\partial I^*}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1,n}, \tag{17}$$

яка зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

У роботі [4] показано, що багатокритеріальна модель (16) забезпечує вибір точки розв’язку на множині рішень, оптимальних по Парето, з урахуванням заданих обмежень на припустиму область зміни векторного критерію, якщо множина Парето належить цієї області. Тому для розв’язання багатокритеріальних задач, у яких задані обмеження з формули (15) на компоненти векторного критерію, варто рекомендувати модель (16).

Вкажемо недоліки НСК (16), яка складається з частинних критеріїв (15):

- громіздкість рівнянь при великій розмірності;
- якщо розв’язок знаходиться на обмеженні, то він буде знайдений з похибкою, хоча і меншою за її граничне значення. За допомогою формули (16)

неможливо досягнути принципово точного розв’язку, інакше знаменники доданків будуть обертатися в нуль.

- наближений розв'язок скалярного критерію.

Переваги НСК:

- Система нелінійних рівнянь для НСК має розмірність r+m+n рівнянь, у той час як для методу невизначених множників Лагранжу – 2r+m+n.

- Унімодальність згорнутого критерію. Нелінійна схема компромісів при опуклих частинних критеріях гарантує один дійсний корінь у межах обмежень.

- Нелінійна схема компромісів зводить задачу (9) з обмеженнями (6) до опуклої ЗНП, якщо частинні критерії – опуклі.

Після застосування формули (16) ЗНП (9) можна розв’язувати також як і безумовну задачу оптимізації, але знайти всі розв’язки $\tilde{y}$, при яких $F(\tilde{y}) = \min_{y \in G} F(y)$ і вибрати з них тільки той розв’язок, який задовольняє обмеженням на частинні критерії. Загальні методи безумовної оптимізації, реалізовані програмно, в даному випадку неприйнятні, тому що знаходять локальні мінімуми поза обмеженнями, тому краще користуватися загальними методами і програмами розв’язку ЗНП.

Сортування обмежень ЗНП за значущістю за допомогою багатокритеріальної постановки ЗНП.

Використаємо переваги НСК в багатокритеріальній оптимізації для гнучкої адаптації до напруженості критеріїв при спрощенні ЗНП.

В роботі [2] запропонована методика, в якій використовується НСК для гнучкої адаптації у відповідності до напруженості критеріїв, тобто коли $I_i \rightarrow I_{im}$. Ця методика дозволяє виявити конфліктні критерії, відсортувати критерії за ступенем конфліктності і в подальшому використовувати тільки конфліктні критерії. Неконфліктні критерії можна не враховувати як такі, що не впливають на результати розв’язку. Тому такий підхід можна використати також для додаткового спрощення початкової задачі (9) з обмеженнями (6). По аналогії з розглянутими в [2] багатокритеріальними задачами можна стверджувати, що НСК може слугувати для класифікації обмежень (6) за ступенем конфліктності. Неконфліктні обмеження не враховуються в подальшому розв’язку задачі (9).

Нехай, наперед відомо, що серед критеріїв, тобто обмежень ЗНП $I_k(y)$ є напружені $I_н(y)$, але невідомо, які саме. Це випливає через нерівномірність зміни кожного частинного критерію в процесі оптимізації. Чим швидше змінюється критерій, тим більший ризик його наближення до свого граничного значення. Тоді схема (7) у цій ситуації реалізує дію Чебишевського (мінімаксного) оператора по цьому частинному критерію (або критеріях). Інші (або спокійні) критерії y_c при оптимізації будуть ігноруватися, хоча це не говорить про те, що вони не важливі для ОПР, який включив їх у вектор i(y). Через присутність напружених критеріїв, розв'язок виходить нестійким і незбалансованим, через невиконання вимог по інших частинних критеріях, і тому є незадовільним. Тому, щоб збалансувати процес оптимізації в задачі (7), необхідно вводити обмеження за спокійними критеріями. Якість розв'язку при цьому може бути значно поліпшеною, однак задача істотно ускладнюється, оскільки не враховується одна з головних переваг НСК (7) (за умови строгої опуклості i(y)) – відсутність обмежень, що вже закладені в її структурі в якості нормуючого вектора обмежень. Усі частинні критерії рівні між собою для схеми інтегральної оптимальності (5), як говорилося раніше, тільки в спокійній ситуації.

Виходячи з викладеного, можна запропонувати багатокритеріальну модель ЗНП на основі (15), (16), яка враховував би як наявність напружених частинних критеріїв і адаптацію до поточної ситуації за схемою (7), так і спокійних, враховуючих властивості схеми (5).

На першому етапі здійснюється оптимізація за НСК (7) для виявлення серед усіх частинних критеріїв напружених $y_н$ і подальшого сортування їх по напруженості.

На другому етапі вирішується задача знаходження оптимального розв'язку y* за допомогою формули:

$$y^* = \arg\min_{y\in Y}\Big(\sum_{k=1}^{s_н}[1-i_k(y)]^{-1} + \sum_{k=1}^{m+r-1-s_н} i_{ok}(y)\Big), \tag{18}$$

де $s_н$ – кількість напружених критеріїв.

Тут перша сума адаптується до напруженої ситуації, а друга – збільшує внесок у вектор i(y) звичайних, «спокійних» критеріїв. Як видно, запропонована формула пов'язує у собі переваги як нелінійної схеми компромісів (7), так і схеми інтегральної оптимальності (5).

Необхідно використати наближений розв'язок, отриманий за допомогою НСК за формулами (16) або (18), як початкове наближення і вирішувати відомими методами спрощену задачу.

Таким чином, на основі результатів, отриманих в [2], для спрощення початкової ЗНП, її можна представити у вигляді скалярного критерію (18). При чисельній реалізації ЗНП за цією схемою не потрібно вводити додаткові обмеження за спокійними критеріями, які є неминучими при наявності напружених критеріїв, тобто задача оптимізації за запропонованою схемою є безумовною, що показали дослідження за допомогою моделювання.

Розв'язання спрощеної ЗНП як безумовної задачі багатокритеріальної оптимізації.

Після застосування НСК вже спрощену ЗНП з малою кількістю обмежень на частинні критерії на основі (16) в силу унімодального мінімуму скалярного критерію можна вирішувати як безумовну задачу оптимізації, але знайти всі мінімуми і вибрати один, що задовольняє обмеженням на частинні критерії. Загальні методи і програми безумовної оптимізації тут не працюють, тому що знаходять локальні мінімуми поза обмеженнями, тому краще користуватися загальними методами і програмами рішення ЗНП.

В даному випадку спрощення – зниження розмірності за допомогою відкидання обмежень, від яких наближене рішення знаходиться далеко.

Аналогічні труднощі виникають при чисельній реалізації безумовної оптимізації за допомогою стандартних програм, які можуть не працювати, оскільки вони шукають мінімум поза області визначення частинних критеріїв. Використовувати такі програми можна тільки для умовної оптимізації із зазначенням обмежень на частинні критерії. Тому безумовну оптимізацію ЗНП необхідно проводити класичним методом – методом множників Лагранжа: отримати систему кінцевих рівнянь, знайти частинні похідні, що є необхідною умовою оптимуму функцій декількох змінних і прирівняти до нуля). Знайти відомими чисельними методами розв'язок всередині обмежень на частинні критерії. Розв'язки поза обмежень відкинути.

Крім того, НСК вимагає визначення обмежень на саму цільову функцію, оскільки вона є рівноправним частинним критерієм, також як і критерії, сформовані з обмежень ЗНП. Потрібно знайти обмеження на компоненти вектора змінних $0 \le I_i \le I_{imax}$, які визначаються з технічного завдання або з фізичних рамок існування рішень. Для цього необхідно вирішити або задачу визначення максимального значення цільової функції (без інших обмежень), або лінійні (лінійно-квадратичні) випадки обчислення цільової функції при максимальних значеннях компонент вектора змінних y_i (тільки в окремому випадку).

Наведемо основні особливості НСК. Багатокритеріальна модель ЗНП на основі НСК по суті – ЗНП: умовна оптимізація скалярного критерію (min I) при обмеженнях на частинні критерії ($0 \le I_i \le I_{imax}$). Допускається рішення ЗНП за допомогою НСК як безумовної задачі оптимізації у відкритій області $\frac{\partial I}{\partial y} = 0$.

Після визначення всіх локальних екстремумів, що є рішенням безумовної задачі оптимізації, необхідно відкинути всі корені за межами $0 \le I_i(y) \le I_{imax}$ обмежень на частинні критерії. Отримані розв'язки перевірити на виконання умов $\varphi_i(y) \le 0$ і залишити тільки ті, які не виконуються. Вирішити спрощену задачу і знову перевірити рішення для відкинутих обмежень, якщо ці обмеження не виконуються, то включити їх в систему обмежень $\varphi_i(y) \le 0$ і т.д.

Алгоритм сортування обмежень ЗНП за значущістю за допомогою НСК.

Дана ЗНП, що складається з m обмежень:

$$I(y)= \min F(y),\ \varphi_i(y)\le c_i.\ i=\overline{1,m}.$$

Алгоритм сортування обмежень ЗНП складається з етапів:

1. Розщепити на m ЗНП, де m – кількість обмежень-нерівностей:

$$i_1(y)=\min F(y),\ \varphi_1(y)\le c_1; \tag{19}$$
$$i_m(y)=\min F(y),\ \varphi_m(y)\le c_m;$$

2. Вирішити за допомогою звичайних методів m ЗНП, що містять по одному обмеженню. Отримати розв'язки $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m$.

3. Обчислити значення частинних критеріїв по отриманим розв'язкам $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m$. Це дозволить виявити напружені і спокійні критерії або обмеження. НСК використовується як класифікатор обмежень і частинних критеріїв для кожної з m ЗНП з п. (1):

$$\begin{aligned}
&I_1 = 1/\left(1 - F(\tilde{y}_1)/F_{max}\right);\\
&I_2 = 1/\left(1 - \varphi_1(\tilde{y}_1)/\varphi_{1_{max}}\right);\\
&...\\
&I_{m+1} = 1/\left(1 - \varphi_m(\tilde{y}_m)/\varphi_{m_{max}}\right).
\end{aligned}$$

4. Відібрати групу конфліктних обмежень типу нерівностей по відношенню до цільової функції, що представлена I_1. Ці нерівності увійдуть в нову спрощену ЗНП.

5. Відкинути спокійні критерії або обмеження і вирішити методом Лагранжа ЗНП тільки з напруженими або значущими критеріями.

6. За потребою розв'язати спрощену ЗНП за допомогою багатокритеріальної моделі на основі НСК.

На простому прикладі покажемо алгоритм, на основі якого ЗНП спрощується класифікатором обмежень на основі НСК.

Приклад 1. Знайти мінімум цільової функції F(y) при обмеженнях φ(y):

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;\ \varphi_1(y)=(y_1-2)^2+(y_2-2)^2\le 2; \tag{20}$$

$$\varphi_2(y)=-\ y_1-2y_2\le -4;\ \ \varphi_3(y)=\ y_1-2y_2\le -1$$

Дана задача має два невідомих, три обмеження і тому легко розв'язується за допомогою методу невизначених множників Лагранжа. Знайдений цим методом розв’язок $\tilde{y}$=(0,8; 1,6). Однак у загальному випадку (наприклад, при великій розмірності) застосування НСК може виявитися необхідним з висловлених раніше міркувань.

Знаходимо F_{max}, $\varphi_{1\text{-}3max}$. Необхідно знайти F_{max} у заданих межах зміни її аргументів, відкидаючи всю систему обмежень типу рівностей і нерівностей. З нерівності $(y_1-2)^2+(y_2-2)^2\le 2$ можна визначити область припустимих значень (ОПЗ) аргументів $0\le y_1\le 3$, $0\le y_2\le 3$. У загальному випадку ОПЗ аргументів визначається з технічного завдання реальних ЗНП.

Нехай нерівності $\varphi_{1\text{-}3}$ будуть обчислюватися з заданою похибкою, оскільки $\varphi_{1\text{-}3max}\ne 0$, бо знаходиться в знаменнику виразу (20). Отже, ЗНП (20) має вигляд:

$$F(y) = y_1^2 + y_2^2;\ F_{max}=9;\quad \varphi_1(y) = (y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2;\ \varphi_{1max} =10^{-2};$$
$$\varphi_2(y)= -y_1-2y_2+4;\ \varphi_{2max} =10^{-2};\quad \varphi_3(y)= y_1-2y_2+1;\ \varphi_{3max} =10^{-2}. \tag{21}$$

Знаходимо наближений розв’язок задачі (21). Наприклад, замість вже отриманих точних значень $\tilde{y}$=(0,8; 1,6) методом невизначених множників Лагранжа, за допомогою оптимізаційних програм в середовищі Mathcad можна одержати $\tilde{y}$=(0,799993259; 1,60000337).

Якщо важлива точність, то отриманий розв’язок можна взяти як початкове наближення й уточнити відомими методами. Зазначимо, що оптимізаційні програми для розв’язання ЗНП, як правило, самі одержують наближений розв’язок $\tilde{y}$. Сформуємо з усіх компонент ЗНП (20) частинні критерії для НСК, і обчислимо їх значення згідно отриманого розв’язку $\tilde{y}$=(0,8; 1,6):

$$I_1 = \frac{1}{\left(1-\frac{F(\tilde{y})}{F_{max}}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\tilde{y}_1^2+\tilde{y}_2^2}{F_{max}}\right)^2} = 6{,}429;\ I_2 = \frac{1}{\left(1-\frac{\varphi_1(\tilde{y})}{\varphi_{1max}}\right)} =$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2}{10^{-2}}\right)^2} = 81{,}857;\ I_3 = \frac{1}{\left(1-\frac{\varphi_2(\tilde{y})}{\varphi_{2max}}\right)} = \tag{22}$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{-y_1-2y_2+4}{10^{-2}}\right)^2} = -499{,}75;\ I_4 = \frac{1}{\left(1-\frac{\varphi_3(\tilde{y})}{\varphi_{3max}}\right)} =$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{y_1-2y_2+1}{10^{-2}}\right)^2} = -7{,}523\times 10^{-5}.$$

ЗНП (20) розбиваємо на три ЗНП, знаходимо для кожної задачі розв’язки $\tilde{y}_1$-$\tilde{y}_3$ і згідно цих отриманих розв’язків значення критеріїв I_1-I_4 для НСК, що містять в знаменниках напруженість:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;\ (y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2 \le \varphi_{1max}; \tag{23, а}$$

$$\tilde{y}_1=(0{,}997;\ 0{,}998);\ I_1 = 1{,}786;\ I_2 = -384{,}366.$$

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;\quad y_1+2y_2-4 \le \varphi_{2max}. \tag{23, б}$$

$$\tilde{y}_2=(0{,}798;\ 1{,}596);\ I_1 = 1{,}04;\ I_3 = 2{,}346\times 10^{13}.$$

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;$$

$$y_1+2y_2-1 \le \varphi_{3max},\ \tilde{y}_3=(0;\ 0);\ I_1 = 1;\ I_4 = 1\times 10^{-4}. \tag{23, в}$$

Для ЗНП (23, а) $|I_2| >> I_1$, отже, нерівність $\varphi_1(y)$ – «напружена», або конфліктна, її відкинути не можна. Це саме можна сказати за нерівність $\varphi_2(y)$ в (23, б), оскільки $|I_3| >> I_1$, проте для нерівності $\varphi_3(y)$ в (23, в) вже $|I_4| >> I_1$ «спокійна» і ніяк не впливає на результат розв’язку ЗНП (20).

Отже, ЗНП (20) спрощується до вигляду:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;\quad \varphi_1(y) = (y_1-2)^2+(y_2-2)^2 \le 2; \tag{24}$$

$$\varphi_2(y)=- y_1-2y_2 \le -4.$$

Змінимо умову-нерівність $\varphi_3(y)= y_1-y_2 \le -1$ таким чином, щоб вона стала значущою в ЗНП (20).

Приклад 2. Знайти мінімум цільової функції F(y) при обмеженнях $\varphi(y)$:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;\ \varphi_1(y) = (y_1-2)^2+(y_2-2)^2 \le 2; \tag{25}$$

$$\varphi_2(y)=-y_1-2y_2 \le -4;\ \varphi_3(y)= y_1-y_2 \le -1.$$

Знайдений методом невизначених множників Лагранжа розв’язок $\tilde{y}$=(2; 1).

Сформуємо з усіх компонент ЗНП (25) частинні критерії для НСК, і обчислимо їх значення згідно отриманого розв’язку $\tilde{y}$:

$$I_1 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{y_1^2+y_2^2}{F_{max}}\right)^2} = 0{,}191;\ I_2 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2}{10^{-2}}\right)^2} = -1\times 10^{-4};$$

$$I_3 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{-y_1-2y_2+4}{10^{-2}}\right)^2} = 1{,}01;\ I_4 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{-y_1+y_2+1}{10^{-2}}\right)^2} = 1{,}01. \tag{26}$$

ЗНП (25) розбиваємо на три ЗНП, знаходимо для кожної задачі розв'язки $\tilde{y}_1$- $\tilde{y}_3$ і згідно цих отриманих розв'язків значення критеріїв I_1-I_4 для НСК. Для ЗНП з $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ результат співпадає з (23,а), (23, б) відповідно, для ЗНП з $\varphi_3(y)$:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2; \; -y_1+y_2+1 \le \varphi_{3\max}. \tag{27}$$

$$\tilde{y}_3=(0{,}495; -0{,}495); \; I_1 = 1{,}064; \; I_4 = -5{,}629 \times 10^{14}.$$

Для ЗНП (25) $|I_{3,4}| >> I_2$, отже, нерівність $\varphi_1(y)$ можна відкинути, бо ніяк не впливає на результат розв'язку ЗНП (25).

Отже, ЗНП (25) спрощується до вигляду:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2; \; \varphi_2(y)=-y_1-2y_2\le-4; \; \varphi_3(y)= y_1-y_2\le-1.$$

Наведемо переваги алгоритму сортування обмежень ЗНП, що здійснюється на основі класифікатора НСК:

1. Обмеження ЗНП сортуються за ступенем конфліктності з їх поділом на напружені і спокійні.

2. Початкова ЗНП спрощується, бо містить тільки обмеження, що конфліктують з цільовою функцією, що і показано в наведених прикладах.

Висновки

В роботі наведені різні способи спрощення задачі нелінійного програмування. В цих задачах серед множини обмежень на допустиму область розв'язків можуть бути суттєві і несуттєві обмеження, які можна відкинути, що призведе до спрощення початкової постановки ЗНП. Компоненти початкової ЗНП, тобто її цільова функція і система обмежень розглядаються як частинні критерії в багатокритеріальній постановці ЗНП. Розглянуті різні скалярні згортки частинних критеріїв і проаналізовані їх можливості в спрощенні ЗНП. Приділено увагу механізму взаємній компенсації конфліктних частинних критеріїв, яка відбувається між ними в процесі оптимізації скалярної згортки.

Використання скалярної згортки у вигляді нелінійної схеми компромісів у якості класифікатора обмежень дозволяє звести розв'язування складної задачі нелінійного програмування до простішої, тим самим зменшивши обчислювальну складність. В цьому способі спрощення використання скалярної згортки у вигляді нелінійної схеми компромісів – це не спосіб розв'язання ЗНП, а спосіб спрощення ЗНП великої розмірності в ЗНП малої розмірності, яка вирішується відомими методами. В даному випадку спрощення – зниження розмірності за допомогою відкидання обмежень, від яких наближений розв’язок знаходиться далеко.

Була додатково спрощена вже існуюча багатокритеріальна модель ЗНП. Представлення ЗНП великої розмірності більш складною багатокритеріальною задачею виправдане зниженням обчислювальної складності задач ЗНП. Здійснюється редукція ЗНП великої розмірності в ЗНП меншої розмірності, яку можна розв’язувати звичайними оптимізаційними методами. На відміну від інших скалярних критеріїв, нелінійна схема компромісів дозволяє знайти неполіпшуваний або оптимальний по Парето розв’язок, а у випадку опуклих частинних критеріїв – унімодальний (єдиний) розв’язок. Складна задача представляється простішою моделлю, вираженою системою рівнянь невеликої розмірності.

Література:

1. А. Н. Воронин, Ю. К. Зиатдинов, О. И. Козлов, и В. С. Чабанюк, Векторная оптимизация динамических систем: под ред. А. Н. Воронина, Київ, Україна: Техніка, 1999.
2. А. А. Засядько, «Два этапа методики гибкой адаптации в задачах многокритериальной оптимизации», Вісник ЧДТУ, № 2, с.14 – 17, 2002.
3. А. А. Засядько, «Решение задачи восстановления параметров объектов информационного обеспечения автоматизированных систем управления», Системи обробки інформації: Збірник наукових праць, Вип. 4 (141), с. 35 – 40, 2016.
4. А. А. Засядько, «Зниження обчислювальної складності в задачі нелінійного програмування великої розмірності», Вісник УБС, №2(17), с. 158 – 162, 2016.
5. D. H. Chung, «Optimal systems with multiple cost functionals, SIAM J. Control», Vol. 5, Issue 3, p. 345 – 350, 1967.